

Esercizio n. 8

Una lastra indefinita, di spessore infinitesimo h , è poggiata sul piano xy (vedi figura, dove una parte di essa è riprodotta). Nella lastra circola una corrente in verso opposto a quello dell'asse x . La densità di corrente è costante $\underline{J} = -J \underline{u}_x$ (\underline{u}_x è il versore dell'asse x).

Calcolare il campo magnetico generato dalla corrente della lastra nel punto P di coordinate $(0,0,d)$.

Soluzione

Pensiamo la lastra come costituita da infiniti fili indefiniti, paralleli all'asse x e di sezione $h dy$. Ciascuno di questi fili è percorso da una corrente contraria all'asse x e di intensità $di = J h dy$ e quindi genera un campo magnetico di intensità

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi r}, \text{ le cui linee di campo sono}$$

circonferenze con centro sul filo e giacenti in un piano ortogonale ad esso (vedi figura).

Poiché la lastra è indefinita, per un dato filo (filo 1), è possibile trovare un filo ad esso simmetrico rispetto all'asse z (filo 2). Coppie di fili simmetrici forniscono in P un campo parallelo alla lastra (vedi figura) e poiché quest'ultima può essere considerata come la sovrapposizione di infinite coppie di fili simmetrici, il campo in P risulta parallelo ed equiverso all'asse y .

Per simmetria, questa conclusione è valida per il campo magnetico in qualsiasi altro punto avente coordinata $z > 0$; per $z < 0$, invece, il campo è parallelo all'asse y ma ha verso contrario ad esso.

L'intensità del campo magnetico può essere calcolata usando il principio di sovrapposizione o la legge di Ampère.

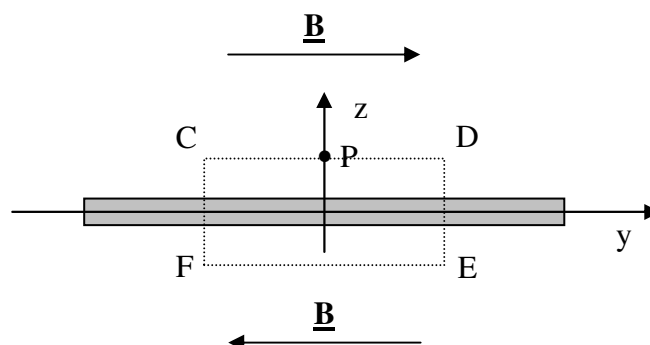
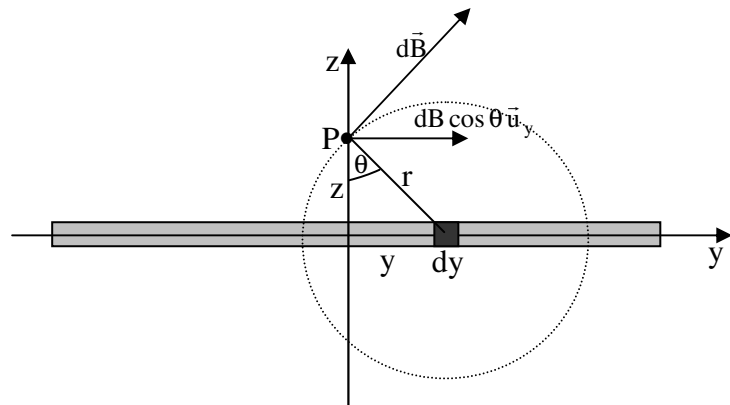
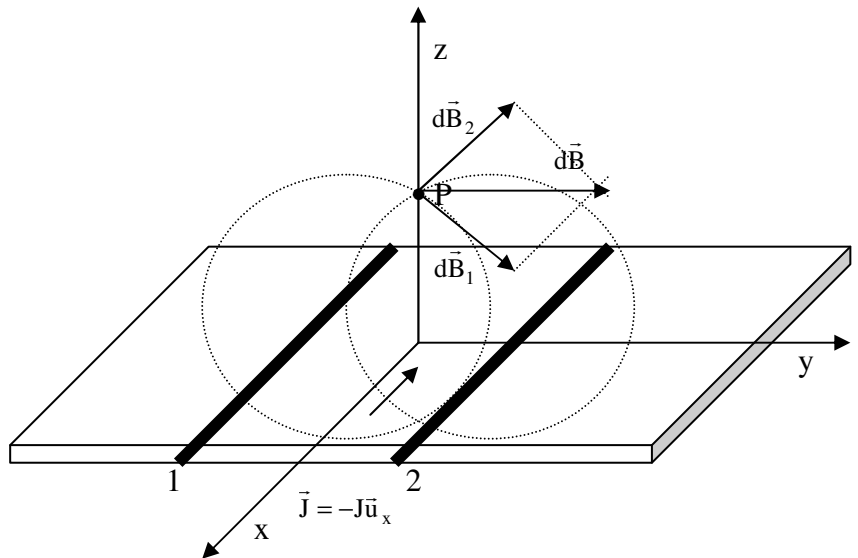
Principio di sovrapposizione:

$$B = \int_0^{B_y} dB_y = \int_0^B dB \cos \theta = \int_0^i \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \cos \theta = \frac{\mu_0 J h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \theta \frac{dy}{r} = \frac{\mu_0 J h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 J h}{2}$$

essendo $\frac{y}{z} = \tan \theta$, $\frac{z}{r} = \cos \theta$ e quindi $\frac{dy}{z} = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ ovvero $\frac{dy}{r} = \frac{dy}{z} \frac{z}{r} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta = \frac{d\theta}{\cos \theta}$

Legge di Ampère:

Prendendo come cammino di integrazione il contorno del rettangolo CDFE e scegliendo come verso di percorrenza quello orario (vedi figura), si ha



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i_{conc.} \Rightarrow \int_F^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 + B \overline{CD} + 0 + B \overline{EF} = 2 B \overline{CD} = \mu_o J h \overline{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_o J h}{2}$$